

Repaso

Un **fenómeno (experimento) determinista** es aquel que bajo las mismas condiciones siempre tiene el mismo resultados.

Un **fenómeno (experimento) aleatorio** es aquel que bajo las mismas condiciones puede tener resultados distintos.

El **espacio muestral** Ω es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral.

Repaso

Sea A un evento de un experimento que se repitió n veces y sea n_A la **frecuencia** del evento A . La **frecuencia relativa** del evento A es

$$f(A) = \frac{n_A}{n}.$$

La **probabilidad frequentista** del evento A se define como

$$P(A) = \lim f(A) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Si el espacio muestral es finita y los eventos son (**equiprobables**), la probabilidad se define en el sentido “*clásico*” del evento A como el número de casos favorables entre el número de casos totales.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}.$$

Repaso

Axiomas de Probabilidad (1933)

Sea Ω un conjunto y $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto potencia de Ω .

La función $P(A) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de probabilidad si

1. Para el conjunto Ω se tiene que $P(\Omega) = 1$.
2. Para todo $A \subset \Omega$, $0 \leq P(A)$.
3. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Repaso

Observación

Sean A, B dos eventos del espacio muestral Ω , $\emptyset$ es conjunto vacío.
Entonces

1. Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
2. $P(A) \leq 1$.
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(\emptyset) = 0$.
5. Si $A \subset B$, entonces $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$ y $P(A \setminus B) = 0$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Repaso

Eventos excluyentes

Dos eventos A y B son eventos **excluyentes** si y sólo si

$$A \cap B = \emptyset.$$

Si dos eventos A y B son excluyentes, **entonces**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eventos independientes

Dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Dos eventos son **dependientes** cuando no son independientes.

Repaso

La probabilidad **conjunto** de los eventos A y B es

$$P(A \cap B)$$

Propiedades de conjuntos independiente

Sean A y B eventos independientes, entonces

1. A y B^c también son eventos independientes;
2. $P(A \cup B) = 1 - P(A^c)P(B^c)$;
3. Si $P(B) \neq 0$, entonces $P(A | B) = P(A)$.

Repaso

Ley de probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición del espacio muestral y B un evento tal que se $P(B | A_i)$ son conocidos.

La probabilidad del evento B está dado por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i).$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición del espacio muestral y B un evento con probabilidad no cero con $P(B | A_i)$ conocidos.

La probabilidad de A_j dado B está dado por:

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)}.$$

Ejemplo 1

De 15 a 24 años (Fuente: Inegi)	Total	Hombre	Mujer
Agresiones	6,345	5,693	640
Accidentes	6,084	5,061	1,023
De tráfico (con motor)	3,666	3,026	640
Lesiones auto intencional.	1,775	1,329	446
Total de muertes violentas	14,204	12,083	2,109

Sea Ω los muertes violentos, A el evento de muerte por lesiones auto-inflingidas intencionalmente y B el evento de ser mujer.

$$P(A) = \frac{1,775}{14,204} = 0.1250 \qquad P(A \cap B) = \frac{446}{14,204} = 0.0314$$

$$P(B) = \frac{2,109}{14,204} = 0.1485 \qquad P(A | B) = \frac{446}{2,109} = 0.2115$$

$$P(B | A) = \frac{446}{1,775} = 0.2513$$

Ejemplo 2

La compañía de una marca de teléfono celular revisa el funcionamiento de un modelo según su memoria.

Saben que 45% de los modelos vendidos tienen 16Mb, 35% tienen 32Mb y 20% tienen 64Mb.

Basado en registros estadísticos saben que durante los primeros dos años fallan 10% de los modelos con 16Mb de memoria, 12% de los modelos con 32Mb de memoria y 15% de los modelos con 64Mb de memoria.

Si elegimos un celular de este modelos al azar, ¿cuál es la probabilidad de falle durante los primeros dos años?

Si un modelos falló durante los primeros dos años, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 32Mb de memoria?

Solución del ejemplo 2

Sea F el evento que un modelo falle durante los primeros dos años.
Sea A el evento de que el modelo tenga memoria de 16Mb,
 B que tenga memoria de 32Mb y C que tenga memoria de 64Mb.
Según los datos del enunciado.

$$\begin{array}{lll} P(A) = 0.45 & P(B) = 0.35 & P(C) = 0.20 \\ P(F | A) = 0.10 & P(F | B) = 0.12 & P(F | C) = 0.15 \end{array}$$

Usamos la ley de probabilidad total,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F | A)P(A) + P(F | B)P(B) + P(F | C)P(C) \\ &= (0.45)(0.10) + (0.35)(0.12) + (0.20)(0.15) \\ &= 0.045 + 0.042 + 0.03 = 0.117. \end{aligned}$$

La probabilidad de que un equipo cualquiera falle es 0.117.

Por el teorema de Bayes tenemos que

$$P(B | F) = \frac{P(F | B)P(B)}{P(F)} = \frac{(0.35)(0.12)}{0.117} = 0.3590.$$

Si un equipo falló, la prob de que su memoria fue 32Mb es 0.3590.