Verifique el teorema 10.7 para las siguientes transformaciones lineales.

Teorema 10.7.
Si $L: V \to W$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V, de dimensión n, en un espacio vectorial W, entonces

nulidad (L) + rango (L) = dim V.

(a) $L(x,y) = (x+y, y) \Rightarrow \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x+y, y) = (a, b)$

así tenemos que

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & a \\ 0 & 1 & : & b \end{bmatrix}$ como la matriz ya esta escalonada y ninguna fila es solo de ceros podemos decir que $Im(L) = \mathbb{R}^2$

Dim = 2

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0$ y $x = -y$

$x = 0$

$(x, y) = (0, 0)$

$\therefore Ker(L) = \{(0)\}$

Dim = 0

$\Rightarrow \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L)) = \dim \mathbb{R}^2$

$0 + 2 = 2$

$2 = 2$

Se cumple el teorema.

(b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & -3 & -4 & c \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 - R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 0 & -5 & -7 & c-b \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2 \cdot 2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & a \\ 4 & 4 & 6 & 2b \\ 0 & -5 & -7 & c-b \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 - R_1 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & a \\ 0 & 5 & 7 & 2b-a \\ 0 & -5 & -7 & c-b \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 + R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & a \\ 0 & 5 & 7 & 2b-a \\ 0 & 0 & 0 & c+b-a \end{array}\right]$$

así tenemos que:

$c + b - a = 0$ si $a = x,\ b = y,\ c = z$

$z + y - x = 0 \Rightarrow (-x + y + z = 0)(-1)$

$x - y - z = 0$

así $\operatorname{Im}(L) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$

Dim = 2

Ahora

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 - R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \cdot 2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 + R_2 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} (1)\ 4x - y - z = 0 \\ (2)\ \quad 5y + 7z = 0 \end{array}$$

Usamos el parámetro $t$, así

$z = t$

Sustituimos en (2)

$5y + 7t = 0$

$5y = -7t$

$y = -\frac{7}{5}t$

sustituimos en (3)

$4x + \frac{7}{5}t - t = 0$

$4x + \frac{2}{5}t = 0$

$4x = -\frac{2}{5}t$

$x = \dfrac{\frac{-2t}{5}}{4}$

$x = \frac{-2t}{20}$

$x = -\frac{1}{10}t$

$\therefore\ z = t$

$y = -\frac{7}{5}t$

$x = -\frac{1}{10}t$

Si $(x, y, z) \in \text{Ker } L, (x, y, z)$

$= \left(-\frac{1}{10}t\ ;\ -\frac{7}{5}, t\right)$

$= t\left(-\frac{1}{10}, -\frac{7}{5}, 1\right)$

$\Rightarrow \text{Ker } L \left(-\frac{1}{10}, -\frac{7}{5}, 1\right)$

Dim = 1

$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = \dim \mathbb{R}^3$

$2 + 1 = 3$

$3 = 3$

$\therefore$ Se cumple el teorema.

(c) = $L(x, y, z) = (x + y - z, x + y, y + z)$

$(x + y - z, x + y, y + z) = (a, b, c)$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ R_3 \rightleftarrows R_2 \\ R_2 \rightleftarrows R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & b \end{array}\right]$$

$$R_3 - R_1 \to R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & b-a \end{array}\right]$$

Como la matriz ya está escalonada y no hay ninguna fila solo con ceros, podemos decir que $Im(L) = \mathbb{R}^3$

Dim = 3

luego

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ R_3 \rightleftarrows R_2 \\ R \rightleftarrows R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_3 - R_1 \to R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x = y = z = 0 \quad \therefore Ker(L) = \{0\}$

Dim = 0

$\Rightarrow Dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) = dim\ \mathbb{R}^3$

$0 + 3 = 3$

$3 = 3$

$\therefore$ Se cumple el teorema.