Sea $L: P_2 \to P_2$ la transformación definida como $L(at^2 + bt + c) = (a+c)t^2 + (b+c)t$.

(a) ¿ $t^2 - t - 1$ está en el núcleo (L)?

tetemos que:

$a = 1$

$b = -1$

$c = -1$

$$\Rightarrow L(t^2 - t - 1) = (1-1)t^2 + (-1-1)t$$
$$= (0)t^2 + (-2)t$$
$$= -2t$$

como $-2t \neq 0$

$t^2 - t - 1$ no esta en el núcleo de L.

(b) ¿ $t^2 + t - 1$ está en el núcleo (L)?

$a = 1$

$b = 1$

$c = -1$

$$\Rightarrow L(t^2 + t - 1) = (1-1)t^2 + (1-1)t$$
$$= (0)t^2 + (0)t$$
$$= 0$$

$\therefore$ $t^2 - t - 1$ sí está en núcleo (L).

(c) ¿ $2t^2 - t$ está en Im(L)?

El vector $2t^2 - t$ está en Im(L) si podemos determinar un vector $at^2 + bt + c$ en P_2 tal que

$$L(at^2 + bt + c) = 2t^2 - t$$

Como $L(at^2+bt+c) = (a+c)t^2+(b+c)t$,
tenemos que
$(a+c)t^2+(b+c)t = 2t^2-t$

Podemos escribir el lado izquierdo de esta ecuación como:
$(a+c)t^2+(b+c)t+c = 2t^2-t$

$\Rightarrow$ ② $a+c=2$ $\Rightarrow$ $a+0=2$ $\therefore$ $a=2$
① $b+c=-1$ $\quad$ $b+0=-1$ $\quad$ $b=-1$
$c=0$ $\quad$ $c=0$

Como este sistema tiene solución, el vector dado sí está en $Im(L)$.

(d) ¿ t^2-t+2 está en $img(L)$?
El vector t^2-t+2 está en $Im(L)$ sí podemos determinar un vector at^2+bt+c en $\mathbb{P}_2$ tal que
$L(at^2+bt+c) = t^2-t+2$
Como $L(at^2+bt+c) = (a+c)t^2+(b+c)t$, tenemos que
$(a+c)t^2+(b+c)t = t^2-t+2$
Podemos escribir del lado izquierdo
$(a+c)t^2+(b+c)t+c = t^2-t+2$

$\Rightarrow$ $a+c=1$ $\Rightarrow$ $a=1-2=-1$
$b+c=-1$ $\quad$ $b=-1-2=-3$
$c=2$ $\quad$ $c=2$

Como este sistema lineal tiene solución, el vector dado sí esta en $Im(L)$.

(e) Determine una base para núcleo(L).

El vector at^2+bt+c está en núcleo(L) si

$L(at^2+bt+c)=0$, es decir

$(a+c)t^2+(b+c)t=0$

$$\begin{aligned} a \quad\quad +c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{si} \quad \begin{aligned} c &= t \\ b &= -t \\ a &= -t \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ de modo que una base para núcleo (L) es $\{-t^2-t+1\}$

(f) Determine una base para Im(L).

Utilizamos base canónica

$$L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t^2 \; ; \quad L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t \; ; \quad L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t^2+t$$

$Im(L) = \{(t^2, t, t^2+t)\}$