9. Verifique el teorema 10.7 para las siguientes transformaciones lineales.

a) $L(x,y) = (x+y, y)$

Sacamos la matriz asociada de 2x1

$$A = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz tiene 2 pivotes entonces el rango de la matriz A es 2.

$$Ran(A) = 2$$

Y la imagen de A es: $Im(A) = Gen\{(1,1), (0,1)\}$

Y por el teorema 10.7 nos dice que:

$$null(T) + ran(T) = \dim V$$

$$null(A) + 2 = 2$$

$$null(A) = 0$$

(b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Ya tenemos la matriz asociada de 3x3
Procedemos a escalonarla:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} //$$

Observamos que la matriz tiene 2 pivotes, por lo tanto el Rango de A es 2

$$Ran(A) = 2$$

Y la imagen de A es: $Im(A) = Gen\{(2,-3,-4),(0,-5,-7)\}$

Y por el teorema 10.7

$$null(A) + ran(A) = \dim V$$
$$null(A) + 2 = 3$$
$$null(A) = 3 - 2$$
$$null(A) = 1 //$$

c)

$L(x,y,z) = (x+y-z, x+y, y+z)$

Sacamos la matriz asociada de 3x3

$$A = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Procedemos a escalonarla

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} //$$

Observamos que la matriz tiene 3 pivotes, $\therefore$ su rango es de 3.

$$\mathrm{Ran}(A) = 3 //$$

Y la imagen de A es: $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Gen}\{(1\,1\,-1), (0\,1\,1), (0\,0\,-1)\}$

Y por el teorema 10.7:

$$\mathrm{null}(A) + \mathrm{ran}(A) = \dim V$$
$$\mathrm{null}(A) + 3 = 3$$
$$\mathrm{null}(A) = 0 //$$