Teorema 10.7

Si $L: V \to W$ es una transformacion lineal de un espacio vectorial V, de dimension n, en un espacio vectorial W entonces

$$\text{nulidad}(L) + \text{rango}(L) = \dim V$$

(10, 10.2, 9)

Verificar el teorema 10.7 para las sig. Transformaciones

a) $L(x, y) = (x+y, y)$

el vector (x, y) esta en el nucleo si

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base para el sistema homogeneo

$$\begin{matrix} x + y = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{base para el nucleo es } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nulidad $= 0$

Img(L)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(\text{Img } L) = 2$$

entonces

Nulidad + Rango = 0 + 2

$\Rightarrow$

$\dim R^2 = 2$

$\therefore \dim R^2 =$ Nulida[illegible]

$2 = 0 + 2$

b) $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

El vector esta en el nucleo si

$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La base para el sistema homogeneo

$$4x - y - z = 0$$
$$2x + 2y + 3z = 0$$
$$2x - 3y - 4z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} R_1/4 \to R_1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} -2R_1 + R_2 \to R_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-2R_1 + R_3 \to R_3 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} R_3 + R_2 \to R_3 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 / \tfrac{5}{2} \to R_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{4}R_2 - R_1 \to R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ La base para el nucleo es $\begin{pmatrix} -1/10 \\ -7/5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Nulidad $= 1$

Img. L $\quad x\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ damos ver como combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Img} L \subseteq 3$

Rango $= 2$

$\therefore \dim V =$ nulidad $+$ Rango

$$3 = 1 + 2$$
$$3 = 3$$

c) $L(x,y,z)=(x+y-z,x+y,y+z)$

El vector está en el núcleo si

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La base del sistema homogéneo

$$\begin{aligned}x+y-z&=0\\x+y&=0\\y+z&=0\end{aligned} \Rightarrow \text{base para el núcleo es } \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nulidad $=0$

Img L $\quad x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango $L=3$

Img $L=3$

dim V = nulidad + rango

$3 = 0+3$

$3=3$