UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

ALGEBRA LINEAL I.

Matriz de una transformación

Definición 1. *Sean V y W espacios vectoriales, de dimensión finita con bases ordenadas $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\tilde{\beta} = \{w_1, \dots, w_n\}$, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Para cada $j = 1, \dots, n$, existen escalares únicos a_{ij}, con $i = 1, \dots, n$, tales que*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \ \text{para } j = 1, \dots, n.$$

La matriz A definida por $A = (a_{ij})$, es la **matriz asociada a** *T, en términos de las bases β y $\tilde{\beta}$. Se escribe $[A]_{\beta}^{\tilde{\beta}}$. Si $V = W$ y $\beta = \tilde{\beta}$, entonces solamente se escribe $[A]_{\beta}$.*

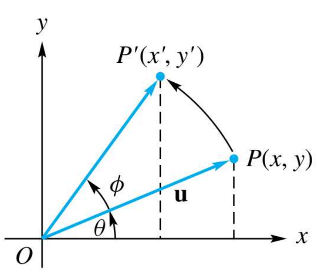
Ejemplo 1. *Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$, una transformación lineal dada por $T(p(x)) = \dfrac{dp}{dx}$. Considera las bases canónicas de cada espacio. Hallar la matriz asociada a T.*

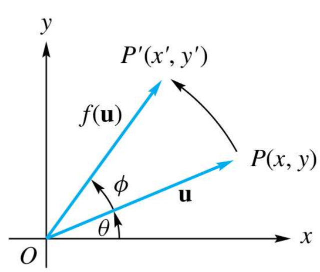
Ejemplo 2. *Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección del espacio en el plano XY. Dada por $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.*

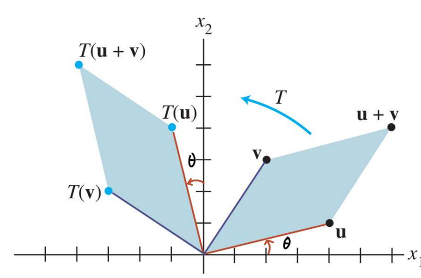
Ejemplo 3. *Sea $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la identidad, dada por $I(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.*

Ejemplo 4. *Sea $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación, dada por*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$







Ejemplo 5. *Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por*

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Tomando las bases canónicas respectivas β y $\tilde{\beta}$, hallar: (a) la matriz $[L]_{\beta}^{\tilde{\beta}}$. (b) hallar la matriz $[L]_{\gamma}^{\tilde{\gamma}}$, donde

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \tilde{\gamma} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Operaciones entre transformaciones

Definición 2. *Sean $T, U : V \to W$, funciones arbitrarias entre los espacios vectoriales V, W. Define $T + U : V \to W$ y $aT : V \to W$ para $a \in \mathbb{F}$, mediante*

$$(T + U)(v) = Tv + Uv, \qquad y \qquad (aT)(v) = aTv, \text{ para toda } v \in V \tag{1}$$

Teorema 1. *Sean V y W espacios vectoriales, sean $T, U : V \to W$, transformaciones lineales.*

(a) Para toda $a \in \mathbb{F}$, $aT + U$ es una transformación lineal;

(b) Usando las operaciones definidas en (1), el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Nota 1. *Al conjunto descrito anteriormente lo denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$. Cuando $V = W$, escribiremos $\mathcal{L}(V)$.*

Teorema 2. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas β y $\tilde{\beta}$ respectivamente y sean $T, U : V \to W$, transformaciones lineales. Entonces*

(a) $[T + U]_\beta^{\tilde{\beta}} = [T]_\beta^{\tilde{\beta}} + [U]_\beta^{\tilde{\beta}}$;

(b) $[aT]_\beta^{\tilde{\beta}} = a[T]_\beta^{\tilde{\beta}}$ para cualquier escalar, a.

Ejemplo 6. *Sea $T, U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales definidas mediante*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 0, 2x_1 - 4x_2) \qquad U(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1, 3x_1 + 2x_2)$$

Obtener $[T + U]_\beta^{\tilde{\beta}}$, donde β y $\tilde{\beta}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Nota 2. *Sean $F : U \to V$ y $G : V \to W$, transformaciones lineales. Sean A y B las matrices asociadas a tales transformaciones respectivamente. Entonces, para cualquier vector $u \in U$ se tiene*

$$(G \circ F)(u) = G(F(u)) = B(A\,u) = (BA)u$$

Entonces, el producto de matrices AB está asociado a la composición de transformaciones.

Teorema 3. *Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n < \infty$; sea $T : V \to V$ una trasformación lineal y sea A la matriz asociada a dicha transformación. Si $A^1, \ldots, A^n$ son los vectores columna de A, entonces A es invertible si y solo si $\{A^1, \ldots, A^n\}$ son vectores linealmente independientes.*