UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Kernel e Imagen

Definición 1. *Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal.*

1. $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$, *y es un subespacio de V;*
2. $\operatorname{Im}(T) = \{w \in W : T(v) = w, v \in V\}$, *es un subespacio de W.*

Nulidad y Rango de la imagen

Definición 2. *Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal.*

1. *Si $\ker(T)$ es de dimensión finita, entonces la* **nulidad** *de T es* $\dim[(\ker(T))]$
2. *Si $\operatorname{Im}(T)$ es de dimensión finita, entonces el* **rango** *de T es* $\dim[(\operatorname{Im}(T))]$

Teorema 1. *Sean V y W espacios vectoriales. Si $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces*

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Gen}(T(\beta)) = \operatorname{Gen}\Big(\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}\Big)$$

Ejemplo 1. *Considera la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definida por*

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{bmatrix}$$

tomando la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, determina una base para $\operatorname{Im}(T)$

Teorema 2. *Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita, entonces*

$$\mathrm{null(T)} + \operatorname{ran}(T) = \dim(V)$$

Proposición 1. *Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y solo si* $\ker(t) = \{0\}$

Teorema 3. *Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes*

(a) *T es inyectiva;*

(b) *T es suprayectiva;*

(c) $\mathrm{ran(T)} = \dim(V)$.

Ejemplo 2. *Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, un operador lineal definido como*

$$T(f(x)) = 2\frac{df(x)}{dx} + \int_0^x 3f(t)dt$$

Determina: $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{ran}(T)$, $\ker(T)$ *y* $\mathrm{null}(T)$.

Base ordenada

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una* **base ordenada***, es una base de V dotada de un orden en sus elementos.*

Ejemplo 3. *Para el espacio $\mathbb{R}^3$, la base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ordenada. También $\varphi = \{e_2, e_3, e_1\}$ lo es, sin embargo $\beta \neq \varphi$.*
El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base ordenada estandar o también conocida como **base canónica***. De manera similar, para el espacio $\mathbb{P}_n$, la base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, la base canónica de $\mathbb{P}_n$.*

Coordenadas

Definición 4. *Sea $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V de dimensión finita. Para un vector arbitrario $x \in V$, sean $a_i \in \mathbb{F}$, escalares con $j = 1, \dots, n$, tales que*

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$$

Definimos por **vector de coordenadas** *de x en respecto de β, como*

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, y sea $\beta = \{e_1, e_2e_3\}$ la base canónica, si $v = -e_1 + 2e_2 + 5e_3$, entonces su vector de coordenadas es* $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ejemplo 5. *Sea $V = \mathbb{P}_2$, y tomemos la base canónica $\beta = \{1, x, x^2\}$, si $p(x) = 4 + 6x - 7x^2$, entonces* $[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

Coordenadas

Definición 5. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales, de dimensión finita con bases ordenadas* $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\tilde{\beta} = \{w_1, \ldots, w_n\}$*, respectivamente. Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Para cada* $j = 1, \ldots, n$*, existen escalares únicos* a_{ij}*, con* $i = 1, \ldots, n$*, tales que*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

La matriz A *definida por* $A = (a_{ij})$*, es la* **matriz asociada a** T*, en términos de las bases* β *y* $\tilde{\beta}$*. Se escribe* $[A]_{\beta}^{\tilde{\beta}}$*. Si* $V = W$ *y* $\beta = \tilde{\beta}$*, entonces solamente se escribe* $[A]_{\beta}$*.*

Ejemplo 6. *Considera* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, una transformación lienal definida como*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_1, 2x_1 - \sqrt{2}x_2)$$

Escribir $A = [T]_{\beta}^{\tilde{\beta}}$*, con las bases canónicas de cada espacio.*