Mauricio Carreón Cristal

Sea V el conjunto de la matriz $n \times n$ tales que su traza es igual a cero, es decir

$$V = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{Tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0\}$$

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B, C \in M_{n \times n}$, con $n = 2$

$$A \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \qquad C \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

Definimos las operaciones

Suma $A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & -a+w \end{bmatrix}$

Producto por escalar $\alpha A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha -a \end{bmatrix}$

1 La suma es conmutativa

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & -a+w \end{bmatrix}$ Por definición de suma en $M_{2 \times 2}$

$= \begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+(-a) \end{bmatrix}$ Por conmutatividad en $\mathbb{R}$

$$= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = B + A$$

2 La suma es asociativa

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+x)+m & (b+y)+n \\ (c+z)+o & ((-a)+w)+p \end{bmatrix}$$ Por definicion de la suma en $M_{2\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} a(x+m) & b(y+n) \\ c(z+o) & (-a)+(w+p) \end{bmatrix}$$ Por asosiatividad en $\mathbb{R}$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \right) = A + (B+C)$$

3- Elemento neutro

Sea $D_{2\times 2} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donde

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+c & 0+(-a) \end{bmatrix}$$ Por definicion de suma en $M_{2\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = A$$

4 inverso aditivo

Si $A \in M_{2x2} (\mathbb{R})$ inverso aditivo $-A$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad -A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ c+(-c) & -a+a \end{bmatrix}$$ Por definicion de suma en M_{2x2}

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

5. Producto por $1 \in M_{2x2}$

Por definicio de producto de escalares

$$1(A) = 1 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(a) & 1(b) \\ 1(c) & 1(-a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = A$$

6: Asociatividad del producto

Por definicion de producto de escalares

$$(\alpha\beta)A = (\alpha\cdot\beta)\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha\cdot\beta)\cdot a & (\alpha\cdot\beta)\cdot b \\ (\alpha\cdot\beta)\cdot c & (\alpha\cdot\beta)\cdot -a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\cdot(\beta\cdot a) & \alpha\cdot(\beta\cdot b) \\ \alpha\cdot(\beta\cdot c) & \alpha\cdot(\beta\cdot -a) \end{bmatrix}$$ Por asociatividad en $\mathbb{R}$

$$= \alpha\begin{bmatrix} \beta\cdot a & \beta\cdot b \\ \beta\cdot c & \beta\cdot -a \end{bmatrix}$$

$$= \alpha(\beta\cdot A)$$

7: Distributividad

$$\alpha(A+B) = \alpha \cdot \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right)$$

$$= \alpha \cdot \left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & -a+w \end{bmatrix} \right)$$ Por suma en $M_{2\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a+x) & \alpha(b+y) \\ \alpha(c+z) & \alpha(-a+w) \end{bmatrix}$$ Por producto de escalares en $M_{2\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha x & \alpha b + \alpha y \\ \alpha c + \alpha z & \alpha -a + \alpha w \end{bmatrix}$$ Por distributividad en $\mathbb{R}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{bmatrix}$$ Por definicion de suma en $M_{2\times 2}$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x & w \\ z & w \end{bmatrix}$$ Por definicion de suma y producto en $M_{2\times 2}$

$$= \alpha A + \alpha B$$

Al cumplirse todas las propiedades M es un espacio vectorial