Ejercicio 4.2 de Orión

4.2 Muestra que el siguiente conjunto forma una base para el espacio indicado

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, Comprobamos primero la independencia lineal, esto es,

$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) $3x - y = 0$

(2) $2x + 2y + z = 0$

(3) $2x + y = 0$

Tomamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 5 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

① $3x - y = 0$

② $2x + 2y + z = 0$

③ $5x = 0$

$\Rightarrow x = 0$, Sustituimos en ① y tenemos: $y = 0$, Sustituimos en ② y resulta $z = 0$ $\therefore$ el conjunto es linealmente independiente.

Ahora comprobamos que el conjunto genera a $\mathbb{R}^3$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 1 & y \\ 2 & 1 & 0 & z \end{array}\right]$$

$R_1 + R_3 \to R_3$, $(R_1)(2) + R_2 \to R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & x \\ 8 & 0 & 1 & 2x+y \\ 5 & 0 & 0 & x+z \end{array}\right]$$

$(R_3)(\frac{1}{5}) \to R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & x \\ 8 & 0 & 1 & 2x+y \\ 1 & 0 & 0 & \frac{x+z}{5} \end{array}\right]$$

$(R_3)(-3)+R_1 \to R_1$, $(R_3)(-8)+R_2 \to R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & \frac{2x-3z}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x+5y-8z}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{x+z}{5} \end{array}\right]$$

$R_1C_4: \frac{-3x-3z}{5}+\frac{5x}{5}=\frac{2x-3z}{5}$

$R_2C_4: \frac{-8x-8z}{5}+\frac{10x+5y}{5}=\frac{2x+5y-8z}{5}$

$R_1(-1) \to R_2$, $R_2 \to R_3$, $R_3 \to R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x+z}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3z-2x}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x+5y-8z}{5} \end{array}\right]$$

$\therefore$ El conjunto es una base para $\mathbb{R}^3$