Muestra si los siguientes conjuntos forman una base para el espacio indicado.

(4.4) $\{t^3 - t, t^3 + t^2 + 1, t - 1\} \subset P_3(t)$; cuya base canónica es $\{1, t, t^2, t^3\}$

Como $P_3(t)$ es un subespacio de dimensión 3 y $\{t^3 - t, t^3 + t^2 + 1, t - 1\}$ es un conjunto de tres vectores, basta con probar que son linealmente independientes para demostrar que $\{t^3 - t, t^3 + t^2 + 1, t - 1\}$ es una base de $P_3(t)$ (no es necesario probar que además genera $P_3(t)$)

Procedemos identificando a los tres vectores X, Y y Z:

$X = t^3 - t$; $Y = t^3 + t^2 + 1$; $Z = t - 1$

Verificamos sí X; Y; Z; son linealmente independientes, donde $P_3(t)$ es el conjunto de polinomios de grado 3 en función de la variable t; ie

$\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Procedimiento

$\alpha_1(t^3 - t) + \alpha_2(t^3 + t^2 + 1) + \alpha_3(t - 1) = 0$

$\alpha_1 t^3 - \alpha_1 t + \alpha_2 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_2 + \alpha_3 t - \alpha_3 = 0$

$t^3(\alpha_1 + \alpha_2) + t^2(\alpha_2) + t(-\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

de esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lo siguiente:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto el conjunto de vectores **$\{t^3 - t, t^3 + t^2 + 1, t - 1\}$** es linealmente independiente, condición suficiente para demostrar que es base del Espacio Vectorial de polinomios $P_3(t)$ de grado 3 en función de la variable t

$t^3(1, 1, 0) + t^2(0, 1, 0) + t(-1, 0, 1) + (0, 1, -1)$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t^3 - t \\ t^3 + t^2 + 1 \\ t - 1 \end{Bmatrix}$$