Josue del Hierro Algebra 16/6/2020

4.5) mostrar que el siguiente conjunto forma una base para el espacio indicado

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

① son LI ?

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 & \lambda_1 \\ -3\lambda_1 & 6\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8\lambda_3 \\ -12\lambda_3 & -4\lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_4 & 0 \\ -\lambda_4 & 2\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_1 + (-\lambda_2) + (-8\lambda_3) \\ -3\lambda_1 + (-\lambda_2) + (-12\lambda_3) + (-\lambda_4) & 6\lambda_1 + (-4\lambda_3) + 2\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_2 - 8\lambda_3 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 & 6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3\lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 8\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \\ 6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -8 & 0 \\ -3 & -1 & -12 & -1 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \underset{\sim}{R_2 - \tfrac{1}{3}(R_1) \to R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1/3 \\ -3 & -1 & -12 & -1 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_3 - (-1)R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1/3 \\ 0 & -1 & -12 & 0 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_4 - 2R_1 \to R_4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1/3 \\ 0 & -1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_3 - (R_2) \to R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_4 - (R_3) \to R_4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$-4 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = (3)(-1)(-4)(1/3) = -4 \qquad \det A = \underline{-4} \quad \therefore \text{ es } \underline{\text{LI}}$$

por otro lado el sistema de ecuaciones lo podemos ver como $A\bar{x} = b$ que tiene solucion esto significa que $b = M_{2\times 2} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y se puede escribir como combinacion lineal de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$\therefore$ 4.5 es una base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$