(1.2) Sea V el conjunto de las matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

1) Conmutatividad de la suma

$x, y \in V$

$$x=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$x+y=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & \overset{\in \mathbb{F}}{b_1+b_2} \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}\underset{\text{por conmutatividad en } \mathbb{F}}{=} y+x \checkmark$$

(2) La suma es asociativa

$x, y, z \in V$

$$x=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{bmatrix},\ z=\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$[x+y]+z=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & \underbrace{a_1+a_2+a_3}_{\in \mathbb{F}} \end{bmatrix}=x+[y+z] \checkmark$$

por asociatividad en $\mathbb{F}$

(3) Elemento neutro

$0_{2\times 2}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donde $0_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$x+0=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+0 & b_1+0 \\ c_1+0 & a_1+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix}=x \checkmark$$

(4) Inverso aditivo

Sea $x\in V$ tomamos $-x=\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow x+(-x)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+(-a_1) & b_1+(-b_1) \\ c_1+(-c_1) & a_1+(-a_1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

(5) Neutro mult.

Tomamos $1\in\mathbb{R}$

$$1\cdot x=1\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}=x \checkmark$$

⑥ Para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y cada $X \in V$, $(\alpha\beta)\cdot X = \alpha(\beta \cdot X)$

Sea $\alpha \in \mathbb{F}$

$$(\alpha\beta)A = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a & \alpha\beta b \\ \alpha\beta c & \alpha\beta a \end{bmatrix}$$

$$\alpha(\beta A) = \alpha\left[\beta\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}\right] = \alpha\begin{bmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a & \alpha\beta b \\ \alpha\beta c & \alpha\beta a \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

⑦ Para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y cada par $x, y \in V$, $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix},\quad Y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{F}$$

$$\alpha\cdot(X+Y) = \alpha\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}\right] = \alpha\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a_1+a_2) & \alpha(b_1+b_2) \\ \alpha(c_1+c_2) & \alpha(a_1+a_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \alpha a_2 & \alpha b_1 + \alpha b_2 \\ \alpha c_1 + \alpha c_2 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\cdot X + \alpha\cdot Y = \alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ \alpha c_2 & \alpha a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \alpha a_2 & \alpha b \\ \alpha c_1 + \alpha c_2 & \alpha a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha(X+Y) = \alpha\cdot X + \alpha\cdot Y$$

⑧ Para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y todo $X \in V$, $(\alpha+\beta)\cdot X = \alpha\cdot X + \beta\cdot X$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

$$(\alpha+\beta)X = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a & (\alpha+\beta)b \\ (\alpha+\beta)c & (\alpha+\beta)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a & \alpha b + \beta b \\ \alpha c + \beta c & \alpha a + \beta a \end{pmatrix}$$

$$\alpha\cdot X + \beta\cdot X = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a & \alpha b + \beta b \\ \alpha c + \beta c & \alpha a + \beta a \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\alpha+\beta)X = \alpha\cdot X + \beta\cdot X$$

Podemos concluir que es un espacio vectorial