**Sea V el conjunto de las matrices $\boldsymbol{M_{2x2}}$ ($\mathbb{R}$) tales que**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

**con las operaciones usuales de $\boldsymbol{M_{2x2}}$.**

Sea α, β ∈ $\mathbb{R}$ y A, B, C ∈ $M_{2x2}$, con

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$; $\quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$; $\quad C = \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}$

Definamos las operaciones:

(SUMA) A+B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & a+g \end{bmatrix}$

(PRODUCTO POR ESCALARES) **α** A = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} a & \boldsymbol{\alpha} b \\ \boldsymbol{\alpha} c & \boldsymbol{\alpha} a \end{bmatrix}$

1. **La suma es conmutativa.**

A+B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & a+g \end{bmatrix}$ *por definición de suma en* $M_{2x2}$

= $\begin{bmatrix} d+a & e+b \\ f+c & g+a \end{bmatrix}$ por conmutatividad en $\mathbb{R}$

$= \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ = B+A

2. **La suma es asociativa.**

(A + B) + C = $\left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} (a+d)+h & (b+e)+i \\ (c+f)+j & (a+g)+k \end{bmatrix}$ *por definición de suma en* $M_{2x2}$

$= \begin{bmatrix} a+(d+h) & b+(e+i) \\ c+(f+j) & a+(g+k) \end{bmatrix}$ $por\ asociatividad\ en\ \mathbb{R}$

= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \right)$ = A + (B + C)

3. **Elemento neutro.**

Sea $0_{2x2} \in M_{2x2}$ **(**$\mathbb{R}$) donde

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que:

$$0 + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+c & 0+a \end{bmatrix}$$ *por definición de suma en $M_{2x2}$*

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = A$$

4. **Inverso aditivo.**

Si A $\in$ $M_{2x2}$ **(**$\mathbb{R}$)**,** nuestro candidato para inverso aditivo será –A, esto es

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix};$ $\quad$ $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -a \end{bmatrix};$

observemos que

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ c+(-c) & a+(-a) \end{bmatrix}$$ *por definición de suma en $M_{2x2}$*

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

5. **Producto por 1 $\in$ $\boldsymbol{M_{2x2}}$**

Por definición de producto de escalares

$$1\,(A) = \begin{bmatrix} 1(a) & 1(b) \\ 1(c) & 1(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = A$$

6. **Asociatividad del producto.**

Por definición de producto de escalares

$$(\alpha\beta)\,A = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a & (\alpha\beta)b \\ (\alpha\beta)c & (\alpha\beta)a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\beta a) & \alpha(\beta b) \\ \alpha(\beta c) & \alpha(\beta a) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta a \end{bmatrix} = \alpha\,(\beta A)$$

**7. Y 8. Distributividad.**

$$\alpha(A+B) = \alpha\left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} \right)$$

$$= \boldsymbol{\alpha}\left( \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & a+g \end{bmatrix} \right)$$ *por definición de suma en* $M_{2x2}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a+d) & \alpha(b+e) \\ \alpha(c+f) & \alpha(a+g) \end{bmatrix}$$ *por definición de producto de escalares en* $M_{2x2}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a+\alpha d & \alpha b+\alpha e \\ \alpha c+\alpha f & \alpha a+\alpha g \end{bmatrix}$$ $por\ distributividad\ en\ \mathbb{R}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha d & \alpha e \\ \alpha f & \alpha g \end{bmatrix}$$ *por definición de suma en* $M_{2x2}$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$$ *por definición de suma y producto en* $M_{2x2}$

$= \alpha A + \alpha B$

**Conclusión:** Como se cumplen todas las propiedades, entonces M es un espacio vectorial.