UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Espacio Vectorial

Definición 1. *Diremos que V es un* ***espacio vectorial*** *sobre un campo $\mathbb{F}$ si $(V, +, \cdot)$ cumple todas y cada una de las siguientes condiciones*

(i) $\forall x, y \in V$, $x + y = y + x$;

(ii) $\forall x, y, z \in V$, $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(iii) $0 \in V$;

(iv) *Si* $y \in V$ *entonces* $-y \in V$;

(v) $\forall x \in V$, *se tiene* $1 \cdot x = x$;

(vi) $\forall x \in V$, $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$

(vii) $\forall x, y \in V$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

(viii) $\forall x \in V$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Subspacio Vectorial

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial, y sea W un subconjunto de V. Diremos que W es un* **subespacio vectorial** *de V si satisface las siguientes condiciones*

(i) *Si* $u, v \in W$, *entonces* $u + v \in W$;

(ii) *Si* $u \in W$ *y* $\alpha \in F$, *entonces* $\alpha\, u \in W$;

Independencia lineal

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial sobre F. Diremos que $S \subset V$ es* **linealmente dependiente** *si existen vectores distintos $u_1, \dots, u_\ell$ en S y escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, distintos de cero (no todos), tales que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_\ell u_\ell = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Base

Definición 4. *Sea V un espacio vectorial. Una* **base** *para V es un conjunto de vectores en V tales que son linealmente independientes y generan a V.*

Nota 1. *Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces el espacio es finito-dimensional.*

Ejemplo 1. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, Sea*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente y genera a V.

Ejemplo 2. *Sea $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, consideremos el conjunto*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente y genera a V.

Espacios vectoriales

Ejemplo 3. *Sea* $V = \mathbb{R}^2$, *Define las operaciones como sigue*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}, \qquad c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Verifica si V *con esas operaciones es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4. *Considera el conjunto*

$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$$

con las operaciones de suma y producto de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *verifica si* V *es un espacio vectorial.*

Nota 2. *Decimos que una función* f, *definida en* $\mathbb{R}$ *con valores reales, es* **función par** *si* $f(-t) = f(t)$ *para todo número real* t.

Ejemplo 5. *Considera el conjunto*

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(-t) = f(t)\}$$

con las operaciones de suma y producto de funciones

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (c\,f)(t) = c\,[f(t)]$$

es un espacio vectorial.

Subespacios vectoriales

Ejemplo 6. *Sea* $V = \mathbb{R}^2$, *Sea*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = y \right\}$$

Verifica si S *es un subespacio vectorial de* V.

Ejemplo 7. *Sea* $V = \mathbb{R}^3$, *Sea*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2,\, 2x_2 = x_3 \right\}$$

Verifica si S *es un subespacio vectorial de* V.

Nota 3. *Una ecuación diferencial, es una expresión que involucra variables independientes, funciones y sus derivadas. Es decir,* $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^n(x)) = k$. *Una solución de una ecuación diferencial es una función que satisface la la ecuación.*

Ejemplo 8. *Considera la ecuación diferencial*

$$y'' - y' + 2y = 0$$

Sea V *el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial dada. Verifica que* V *con la suma y producto como en el ejemplo 5, es un subespacio vectorial de las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Independencia lineal

Ejemplo 9. *Considera el conjunto*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Verifica si S *es un conjunto linealmente independiente.*

Ejemplo 10. *Considera el conjunto*

$$S = \{(x-1)(x+2), x(x+2), x(x-1)\}$$

Verifica que S *es un conjunto linealmente independiente.*

Ejemplo 11. *Considera el conjunto*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \right\}$$

Determina si es linealmente dependiente o no.