Algebra Lineal I.

Subspacio Vectorial

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial, y sea W un subconjunto de V. Diremos que W es un* **subespacio vectorial** *de V si satisface las siguientes condiciones*

(i) *Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$;*

(ii) *Si $u \in W$ y α es un escalar, entonces $\alpha\, u \in W$;*

(iii) $0 \in V$ *entonces* $0 \in W$.

Ejemplo 1. *Sea $V = \mathbb{R}^n$. Considera los siguientes conjuntos*

$$\begin{aligned} W_1 =& \{v \in V : v = (v_1, v_2, \dots, v_n), v_1 = 0\}, \\ W_2 =& \{v \in V : v = (v_1, v_2, \dots, v_n), v_1 = 1 + v_2\} \end{aligned}$$

¿serán subespacios vectoriales de V?

Ejemplo 2. *Sea $V = M_{n\times n}(F)$. Recordemos que una matriz A es simétrica si $A = A^t$. El conjunto de matrices simétricas forma un subespacio vectorial del conjunto $M_{n\times n}(F)$.*

subespacio Vectorial

Definición 2. *Una matriz A de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ es* **hermitiana** *(o autoadjunta) si $A = \overline{(A)^t}$, donde la barra denota el conjugado de cada entrada de la matriz.*

Ejemplo 3. *Sea $V = M_{2\times 2}$. Una matriz $A \in V$ es Hermitiana si y solo si tiene la forma*

$$\begin{bmatrix} c & a+ib \\ a-ib & d \end{bmatrix}, \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

No es subespacio de V. Sin embargo, el conjunto $\mathfrak{M} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A = \overline{(A)^t}\}$, es un espacio vectorial. ¿Qué falla?.

Ejemplo 4. *Sea $V = C[0,1]$, el espacio de funciones continuas en $I = [0,1]$. Considera el conjunto $C^1[0,1]$, el espacio de funciones con primera derivada continua. ¿Este conjunto es un subespacio de V?*

Ejemplo 5. *Sea $V = C[0,1]$. Sea $f \in V$, entonces f es Riemman-integrable, esto es $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ existe. Considera*

$$H = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$$

¿H es un subespacio vectorial de $C[0,1]$?

Combinación lineal, ver 2.0

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial arbitrario y S un subconjunto no vacío de V. Dado $\mathbf{v} \in V$, decimos que $\mathbf{v}$ es* **combinación lineal** *de vectores de S, si existe un número finito de vectores $\mathbf{u}_j \in S$ y escalares $\alpha_j \in F$, tales que*

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_\ell \mathbf{u}_\ell \tag{1}$$

Ejemplo 6. *Sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de S. Entonces W es un subespacio vectorial de V.*

Nota 1. *El espacio W descrito anteriormente se le conoce como* **espacio generado** *por S.*

Ejemplo 7. *Considera la siguiente información*

Cuadro 1: **Contenido de vitamina en 100g de alimento**

	A (unidades)	*B1 (mg)*	*B2 (mg)*	*Niacina (mg)*	*C (mg)*
Manzana cocida	0	0.01	0.02	0.2	2
Manzana fresca	90	0.03	0.02	0.1	4
Snikers	0	0.02	0.07	0.2	0
Almejas	100	0.10	0.18	1.3	10
Cupcake	0	0.05	0.06	0.3	0
Atole de trigo	0*	0.01	0.01	0.1	0*
Mermeladas	10	0.01	0.03	0.2	2
Dulce de coco	0	0.02	0.02	0.4	0
Arroz integral	0*	0.34	0.05	4.7	0*
Salsa de soya	0	0.02	0.25	0.4	0
Sopa de pasta	0	0.01	0.01	0.3	0
Arroz	0	0.45	0.63	6.2	0

El contenido de vitaminas por cada alimento corresponde a un vector columna en $\mathbb{R}^5$. Por ejemplo, para la manzana cocida se tiene

$$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.01 \\ 0.02 \\ 0.20 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

Considera los vectores correspondientes a: cupcake, dulce de coco, arroz integral, salsa de soya. ¿Qué podemos decir de estas cantidades de alimento?

Independencia lineal

Definición 4. *Sea V un espacio vectorial sobre F. Diremos que $S \subset V$ es* **linealmente dependiente** *si existen vectores distintos $u_1, \ldots, u_\ell$ en S y escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$, distintos de cero (no todos), tales que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_\ell u_\ell = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Nota 2. *Consecuencias de la definición son*

(i) *Cualquier conjunto que contenga un conjunto linealmente independiente, entonces lo es;*

(ii) *Cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente, entonces lo es;*

(iii) *Cualquier conjunto que contenga al vector 0, es linealmente independiente.*

(iv) *Un conjunto de vectores S es linealmente independiente, si y solo si cada subconjunto finito de S es linealmente independiente. Esto es, para vectores $u_1, \ldots, v_n \in S$, y escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, entonces*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\ell u_\ell = 0,$$

implica que $\alpha_j = 0$, para toda α.

Base

Definición 5. *Sea V un espacio vectorial. Una* **base** *para V es un conjunto de vectores en V tales que son linealmente independientes y generan a V.*

Nota 3. *Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces el espacio es finito-dimensional.*

Ejemplo 8. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, Sea*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente y genera a V.