UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Nota: Sea $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. Si A tiene un renglón de ceros o una columna, entonces $\det(A) = 0$. Si A^t es la matriz transpuesta de A, entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

Teorema 1. *Sea $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, entonces*

(i) *Si un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila para obtener B, entonces* $\det(B) = \det(A)$.

(ii) *Si dos renglones de A se intercambian para obtener la matriz B, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

(iii) *Si una fila de A se, multiplica por k para obtener la matriz B, entonces* $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

Ejemplo 2. *Calcular el determinante de* $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz adjunta

La transpuesta de la matriz de cofactores, la llamaremos **matriz adjunta**. Es decir

$$\mathrm{adj}(A) = cof(A)^t = (c_{ij})^t$$

Matriz inversa

Si A es una matriz invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj(A)}$$

Propiedades básicas de los determinantes

Teorema 3. *Sean $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ y κ un escalar arbitrario, entonces se cumplen*

$$\det(k\,A) = k^n \det(A), \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Ejemplo 4. *Resolver el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, determinando la matriz inversa*

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 0 \\ -x - 2y \qquad &= 1 \\ 2x + 5y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 5. *Considera las matrices* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. *Muestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ se puede escribir como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Usa este resultado para hallar la solución al sistema original.*

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada en la que todas sus entradas arriba de la diagonal son cero, diremos que es una **matriz triangular inferior**. Una matriz cuadrada, en la que todas sus entradas abajo de la diagonal son ceros, diremos que es una **matriz triangular superior**.

Ejemplo 6. *Matrices triangulares*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}}_{\textit{Matriz Triangular superior de } 4\times 4} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{\textit{Matriz Triangular inferior de } 4\times 4}$$

Propiedades de las matrices triangulares

(i) La transpuesta de una matriz triangular superior (inferior) es una matriz triangular inferior (superior).

(ii) El producto de matrices triangulares superiores (inferiores) es triangular superior (inferior).

(iii) Una matriz triangular es invertible si y solo si, los elementos de su diagonal son distintos de cero.

(iv) La matriz inversa de una triangular superior (inferior) es triangular superior (inferior).

Ejemplo 7. *Considera las siguientes matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Discutir las matrices A^{-1}, AB, BA, A^t, B^t.

Factorización LU

Una situación muy común en la vida real, sean negocios o industria, es resolver una secuencia de ecuaciones que tienen la misma matriz de coeficientes, es decir

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ldots, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k.$$

Definición 1. *Dada una matriz cuadrada $A_{n\times n}$, diremos que tiene una factorización LU (o descomposición LU) si se puede escribir como*

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior y U una triangular superior.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

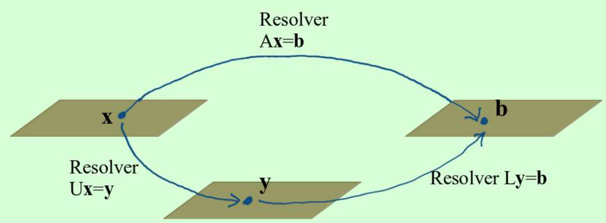
Método de descomposición LU

(i) Reescribir el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(ii) Definir una nueva matriz $\mathbf{y}$ como $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(iii) Usar (ii) para escribir el sistema (i) como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$

(iv) Sustituye $\mathbf{y}$ en (ii) para resolver para $\mathbf{x}$.



Ejemplo 8. *¿Cómo se resuelve un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por descomposición LU, para* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$*?*

Considera la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorizacion LU

Teorema 9. *Si una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ puede reducirse a una forma escalonada U por eliminación gaussiana sin intercambio de renglones, entonces A se puede factorizar como $A = LU$.*

Algoritmo de factorización LU

(i) Reducir A a una forma escalonada U, mediante operaciones entre renglones.

(ii) Colocar las entradas de L tal que la misma secuencia de operaciones usadas en A, reduzca L a I.

Si $E_1, \ldots, E_p$ son matrices elementales tales que

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

entonces

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU$$

donde $L = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$

Ejemplo 10. *Hallar una descomposición LU para la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$