ALGEBRA LINEAL I.

Ejercicios de Repaso

Episodio I

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

27 de mayo,2020.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Ejercicios de Repaso

1. En los problemas (1.1) al (1.20) usa el método de *Gauss-Jordan* para encontrar, si existen, todas las soluciones para los sistemas dados

(1.1)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(1.2)
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 \qquad + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(1.3)
$$\begin{aligned} -x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \qquad &= -3 \end{aligned}$$

(1.4)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

(1.5)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

(1.6)
$$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(1.7)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(1.8)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 310x_3 &= 18 \end{aligned}$$

(1.9)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 310x_3 &= 20 \end{aligned}$$

(1.10)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(1.11)
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \quad -0 \end{aligned}$$

(1.12)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 & \quad -0 \end{aligned}$$

(1.13)
$$\begin{aligned} 2x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 \qquad - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad &= -2 \end{aligned}$$

(1.14)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(1.15)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

(1.16)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$$

(1.17)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 21 \end{aligned}$$

(1.18)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 12 \end{aligned}$$

(1.19)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad &= -2 \end{aligned}$$

(1.20)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 \qquad &= 7 \end{aligned}$$

Ejercicios de Repaso

2. En los ejercicios (2.1) al (2.12) determina si la matriz dada se encuentra en forma escalonada, forma escalonada reducida o ninguna de las dos.

(2.1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.2)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(2.3)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.4)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.5)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.6)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.7)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.8)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.9)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(2.10)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2.11)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(2.12)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Determina si las siguientes matrices son invertibles, usando el algoritmo de Gauss-Jordan.

(3.1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(3.2)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(3.3)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3.4)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.5)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3.6)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.7)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.8)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(3.9)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de Repaso

4. Determina si la matriz dada es una matriz elemental, justifica tu respuesta

(4.1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(4.2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(4.3) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(4.4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4.5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(4.6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4.7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(4.8) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4.9) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Usa las matrices dadas para determinar una matriz elemental E que satisfaga la ecuación indicada $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(5.1) $EA = B$,

(5.2) $EC = A$,

(5.3) $EB = D$,

(5.4) $EB = F$,

(5.5) $EF = B$,

(5.6) $ED = B$.

6. Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcula A^2, A^3 y A^4.

7. Considera las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ calcula A^2, A^3, B^2, B^3 y B^4.

8. Una **matriz de probabilidades** es una matriz cuadrada que satisface

(i) todas sus entradas son no negativos,

(ii) la suma de los elementos de cada renglón es 1.

Considera las matrices $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ Muestra que PQ es una matriz de probabilidades.

9. Prueba que si P es una matriz de probabilidades, entonces P^2 también lo es.

10. Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Determina A^{-1}. Determina $(A^t)^{-1}$. ¿Cómo se relacionan $(A^t)^{-1}$ y A^{-1}?

11. ¿Para qué valores de λ el sistema homogéneo

$$\begin{array}{lll} (\lambda-1)x & +2y & = 0 \\ 2x & +(\lambda-1)y & = 0 \end{array}$$

tiene solución no trivial?

Ejercicios de Repaso

12. Para cada una de las matrices dadas, determina la matriz adjunta, luego usa esta para determinar su inversa

(12.1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(12.2) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(12.3) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(12.4) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(12.5) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(12.6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

13. Usando la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales, determina la inversa de la matriz A para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(13.1) $\begin{array}{rrl} 5x & +7y & = 3 \\ 2x & +4y & = 1 \end{array}$

(13.2) $\begin{array}{rrl} -5u & +2v & = 9 \\ 3u & -v & = -4 \end{array}$

(13.3) $\begin{array}{rrrl} s & +t & & = 3 \\ -3s & & +2r & = 0 \\ & t & -2r & = 2 \end{array}$

(13.4) $\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 5 \\ x & +y & -4z & = 10 \\ -4x & +y & +z & = 0 \end{array}$

14. Considera A una matriz de $n \times n$. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, con solución trivial. Muestra que si $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces el sistema $A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tiene solución trivial.

15. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ un sistema de ecuaciones lineales consistente, y sea $\mathbf{x}_1$ una solución. Demuestra que toda solución al sistema puede ser escrita de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

16. Sea A una matriz de $n \times n$, diremos que A es **idempotente** si $A^2 = A$, en particular $A^n = A^2 = A$. Considera A y B matrices idempotentes

(16.1) Demuestra que AB es idempotente si $AB = BA$,

(16.2) Demuestra que si A es idempotente entonces A^t también lo es.

(16.3) Determina los valores de k para los que kA es idempotente.

17. Si A es una matriz $n \times n$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, ¿es cierto que $(A^k)^t = (A^t)^k$?

18. Sean B y C matrices de $m \times n$. Supóngase que $(B - C)D = 0$, y que D es no singular. Demuestra que $B = C$.

19. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Muestra que si $ad - bc = 0$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución. Concluye que A es singular.

20. Muestra que si A es una matriz de $n \times n$, entonces la matriz $A + A^t$ es una matriz simétrica.