UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

(semana 3)

Operaciones matriciales

Definición 1. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Diremos que A es* **invertible** *o* **no-singular** *si existe una matriz B de tamaño $n \times n$ tal que*

$$AB = BA = I_n$$

Tal matriz está determinada de forma única, pues si C es otra matriz inversa de A, es decir $AC = CA = I_n$, entonces

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Ejemplo 1.

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

verifica que C es inversa de A.

Ejemplo 2.

Hallar las inversas de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Teorema 1.

(i) *Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible además $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(ii) *Si A y B son matrices invertibles, entonces AB también lo es, y la inversa del producto AB es el producto de las inversas en orden invertido, esto es $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(iii) *Si A es una matriz invertible, entonces A^t también lo es y la inversa de A^t es la transpuesta de la inversa, es decir $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Definición 2. *Diremos que una matriz de tamaño $m \times n$ es una* **matriz elemental** *si puede ser obtenida de una matriz identidad $m \times m$ mediante una sola operación fundamental de renglones.*

Ejemplo 3.

Una matriz elemental de 2×2 es necesariamente una de las siguientes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \text{ para } c \neq 0.$$

Ejemplo 4.

Las siguientes son matrices elementales

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.

Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, calcula los productos E_1A, E_2A, E_3A.

Nota: Si en una matriz $A_{m\times n}$ se efectúa una operación fundamental entre renglones, la matriz resultante se puede escribir como E_mA, donde E_m es la matriz obtenida de realizar la misma operación en la matriz identidad I_m.

Nota: Cada matriz elemental E_m es invertible. La inversa de E_m es una matriz elemental del mismo tipo que transforma E_m en la matriz identidad I_m.

Ejemplo 6.

(6.1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; **(6.2)** $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(6.3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$; **(6.4)** $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(6.5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$

Teorema 2. *Si A es una matriz de $n \times n$, entonces son equivalentes*

- **(i)** *A es invertible,*
- **(ii)** *A es equivalente mediante operaciones entre renglones, a la matriz identidad $n \times n$,*
- **(iii)** *A es producto de matrices elementales.*

Corolario 3. *Si A es una matriz invertible de $n \times n$, y si mediante una serie de operaciones entre renglones A es reducida a la identidad, entonces esa mismas operaciones aplicadas en I se obtiene A^{-1}.*

Corolario 4. *Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces B es equivalente a A si y solo si $B = PA$, donde P es una matriz invertible de $m \times m$.*

Recap: Sea A una matriz de $m \times n$, cuyas columnas denotaremos por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, entonces el producto de A con $\mathbf{x}$, que se denota por $A\mathbf{x}$, es la combinación lineal de las columnas de A, donde x_i son las entradas de $\mathbf{x}$ y los correspondientes pesos $\mathbf{a}_i$, es decir

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Recap: Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, homogéneo donde $m < n$, siempre tendrá una infinidad de soluciones.

Teorema 5. *Si A es una matriz $n \times n$, entonces son equivalentes*

(i) *A es invertible,*

(ii) *El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tiene solución única, a saber la trivial,*

(iii) *El sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, tiene solución única $\mathbf{x}$ para cada matriz $\mathbf{y}$ de $n \times 1$.*

Algoritmo para determinar A^{-1}

Reduce por renglones las matriz aumentada $[A \quad I]$. Si A es equivalente a la identidad I, entonces $[A \quad I]$ es equivalente a $[I \quad A^{-1}]$. De lo contrario, A no es invertible.

Ejemplo 7.

Determina la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, si existe

Ejemplo 8.

Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, mostraremos que A es una matriz singular.