Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Números Complejos $\mathbb{C}$.

El propósito de esta sección es estudiar el Campo de los números complejos. En este nuevo conjunto se puede resolver el problema de calcular $\sqrt{-x}$ para $x > 0$, esto es, la ecuación $x^2 + 1 = 0$, tiene solución.

Los números complejos que denotaremos por $\mathbb{C}$, se pueden definir a partir del conjunto de los números reales, esto es

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

De esta manera se puede representar a los números complejos como *vectores* en el plano cartesiano, donde las operaciones de suma y producto están definidas mediante:

Dados los números complejos $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &:= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &:= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Con las operaciones anteriores, $\mathbb{C}$ es un campo, donde apra cualquier número complejo $z = (a, b)$ se tiene que

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

En este campo, no hay orden dada la estructura vectorial del mismo, es decir que el orden no es compatible con las operaciones definidas; sin embargo existe un elemento llamado *parte imaginaria* definido por $i = (0, 1)$, el cual tiene la propiedad de que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) := -1.$$

Dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ &= r(\cos\theta + i \sin\theta) \\ &= re^{i\theta}. \end{aligned}$$

Donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan(b/a)$.

Definición 1. *El* **módulo** *de un número complejo $z = a + ib$ está dado por*

$$r = \mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 2. *El* **conjugado** *de un número complejo $z = a + ib$ está dado por*

$$\overline{z} := \overline{(a + ib)} = a - ib.$$

Teorema 1 (Fórmula de Demoivre)**.** *Sea $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ un número complejo, entonces para toda $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que*

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Con la fórmula anterior se pueden obtener las distintas raíces de un número complejo no nulo; es decir, se desea determinar todos los números complejos tales que $\omega^n = z$, donde $z = re^{i\theta}$, entonces

Corolario 2. *Las n-ésimas raíces de z están dadas por*

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

Anillo de Polinomios $\mathbb{K}(x)$.

Si $\mathbb{K}$ es un campo, por ejemplo $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$ con p un número primo, un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Con $a_j \in \mathbb{K}$ y $n \geq 0$ un entero.

Definición 3. *En $\mathbb{K}(x)$ se tienen la suma y el producto. Si $f(x), g(x) \in \mathbb{K}(x)$ son tales que:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &:= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0. \\ f(x) \cdot g(x) &:= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + c_k x^k + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Con las operaciones anteriores, el conjunto $\mathbb{K}(x)$ es un anillo conmutativo con unidad y dominio entero.

Definición 4. *Si* $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \neq 0$ *es un polinomio no nulo, su grado se define como*

$$\mathrm{gr}(f(x)) := n, \text{ si } a_n \neq 0.$$

Proposición 1 (Algoritmo de la división)**.** *Sea* $\mathbb{K}$ *un campo y* $f, g \in \mathbb{K}(x)$*, con* $g(x) \neq 0$*. Entonces, existen polinomios únicos* $q(x), r(x) \in \mathbb{K}(x)$ *tales que*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x);$$

con $r(x) = 0$ *o bien* $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{g(x)}$.

Análogamente al conjunto de números enteros, un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}(x)$ es *primo* o *irreducible* si no es constante y sus únicos divisores son elementos invertibles (es decir, constantes $\alpha \neq 0$ en $\mathbb{K}$) o asociados de $p(x)$ (es decir, polinomios de la forma $\alpha\, p(x)$ con $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$).

Para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se define

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \in \mathbb{K};$$

un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ se llama *raíz* o *cero* del polimonio $f(x)$ si satisface $f(\alpha) = 0$.

Teorema 3 (Fundamental del Álgebra)**.** *Sea* $f(x) \in \mathbb{K}(x)$ *un polinomio de grado* $n \geq 1$*. Entonces, el número de raíces de* $f(x)$ *en* $\mathbb{K}$*, contando su multiplicidad, es menor o igual al grado del polimonio.*
Más aún, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ *son todas las raíces de* $f(x)$ *en* $\mathbb{K}$*, con multiplicidades* $m_1, \ldots, m_r$*, respectivamente, entonces*

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} g(x),$$

donde $g(x) \in \mathbb{K}(x)$ *no tiene raíces en* $\mathbb{K}$*.*

Referencias

A. Grimaldi, R.; *Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones.* Prentice Hall, 2003.

B. Levin, O.; *Discrete Mathematics, an open introduction.* 3rd Edition, University of Northern Colorado, 2013.

C. Rincón, C.; *Álgebra Superior.* McGRaw-Hill Education, 2013.

D. Rosen, K.H; *Discrete Mathematics and Its Applications. 7th Ed*, Mc Graw Hill, 2012.

E. Zaldivar, F.; *Fundamentos de Álgebra.* Fondo de Cultura Económica, México 2005.