ALGEBRA LINEAL I.

Semana 2

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

18 de mayo,2020.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 1. *Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m; \end{aligned} \tag{1}$$

la **matriz de coeficientes** *del sistema está dada por*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

La **matriz aumentada** *del sistema está dada por*

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & y_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} & y_m \end{array}\right]$$

Definición 2. *Una matriz rectangular está en su forma* **escalonada** *(o escalonada por renglones) si satisface las siguientes propiedades*

1. *Todo renglón con ceros se encuentra debajo de un renglón sin ceros,*
2. *Cada entrada principal de una fila se encuentra en la columna a la derecha de la entrada principal de una fila arriba de esta,*
3. *Todas las entradas en una columna debajo de una entrada principal son ceros,*

Si una matriz escalonada satisface las siguientes condiciones, entonces es una matriz en forma **escalonada reducida**

4. *La entrada principal en cada fila no nula es 1,*
5. *Cada 1 principal es la única entrada no nula de esa columna.*

Ejemplos

1. Las siguientes matrices son ejemplos de matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} \bigstar & * & * & * \\ 0 & \bigstar & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \bigstar & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bigstar & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigstar & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigstar & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigstar & * \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

2. Las siguientes matrices están en su forma escalonada reducida pues tienen 1's en sus entradas principales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Ejemplos.

3. Determina el valor de h de tal forma que la matriz dada sea la matriz aumentada de un sistema consitente

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & -3 & h \\ -6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Definición 3. *Dada una matriz A, una posición* **pivote** *es una entrada de A que corresponde a un* 1 *en su entrada principal para la correspondiente forma escalonada reducida. Una* **columna pivote** *es una columna de A que contiene una posición pivote.*

4. Reducir la matriz dada a su forma escalonada, identificar las columnas pivote

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de reducción.

(i) Comienza con la columna de la extrema izquierda no nula. Esta será una columna pivote, la posición pivote se encontrará en la parte superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 9 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

(ii) Selecciona una entrada no nula como pivote de la columna indicada. Si es necesario aplica un intercambio de renglones.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 9 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

(iii) Usa operaciones elementales para obtener ceros en las posiciones debajo del pivote.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

(iv) Pasa al siguiente renglón y aplica los pasos $1-3$, en los siguientes renglones, ignorando la columna piivote anterior y los renglones superiores.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(v) Identifica el último pivote a la derecha. Comienza a hacer ceros en los renglones superiores. Si el pivote no es unitario, escala para obtener uno.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta es la forma reducida de una forma escalonada.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Ejemplos

5. Determinar una solución general al sistema cuya matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

6. Determinar la existencia de las soluciones del siguiente sistema

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Hallar una solución al sistema cuya matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Determinar la existencia de las soluciones del siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

9. Supongamos que una matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones, de tamaño 4×7 que tiene 4 pivotes. ¿El sistema es consistente? de ser así, ¿cuántas soluciones tiene?